

# Determinación matemática de los barcos de la bóveda de la Sagrada Familia

Amadeo Monreal Pujadas

Jordi Coll i Grifoll

**Sinopsis.** En este escrito se expone un problema geométrico relacionado con el diseño de la bóveda del templo de la Sagrada Familia de Gaudí, en Barcelona. Éste se traduce a un problema matemático y se describe el algoritmo práctico adoptado para resolverlo. Asimismo, se resume panorámicamente todo el proceso hasta su puesta en obra. Conviene advertir que el trabajo aquí expuesto no contiene resultados punteros de investigación en matemáticas ni un discurso erudito sobre los principios de la arquitectura sino un ejemplo de uso de matemáticas comunes aplicado a la resolución de un problema práctico originado en el diseño arquitectónico.

**Introducción.** Gaudí sólo alcanzó a dirigir una etapa muy incipiente de las obras del templo de la Sagrada Familia, de modo que, aunque tenía una concepción global del proyecto, había numerosos elementos para los que sólo llegó a un nivel de concepto o boceto, dado que su ejecución en obra no era inminente. Con el tiempo, llegó el momento de construir estos elementos y los actuales arquitectos responsables de la obra se enfrentaron al problema de dar forma precisa y decidir posiciones exactas para cada uno de ellos. Descubrieron entonces que, en muchos casos, la tarea distaba de ser trivial si, como es el caso, se pretende proseguir fielmente la construcción del templo. La concreción rigurosa de estos elementos comporta dificultades geométricas nada despreciables, hasta el punto de que es dudoso que en los tiempos de Gaudí se dispusiera de medios técnicos (especialmente informáticos) suficientes para resolverlos correctamente. Como a primera vista no parecen problemas tan complejos, es muy posible que Gaudí no fuera consciente de su dificultad final. Para siempre queda la duda de cómo hubiera resuelto él tales dificultades inesperadas. La decisión de sus continuadores ha sido siempre seguir fielmente el proyecto, atacar de frente cualquier dificultad y utilizar los recursos que sean necesarios. Entre ellos están los métodos matemáticos, especialmente el álgebra lineal, la geometría analítica y el cálculo numérico, en combinación con la potencia de proceso de la informática. Entre los diversos problemas geométricos aludidos, se ha escogido uno especialmente interesante para exponerlo en este escrito, a modo de ejemplo ilustrativo; ejemplo que, más allá del caso particular de la Sagrada Familia, muestra una vez más que el diálogo entre las matemáticas y la arquitectura puede ser eficaz y fecundo para ambas partes.



figura 1a



figura 1b

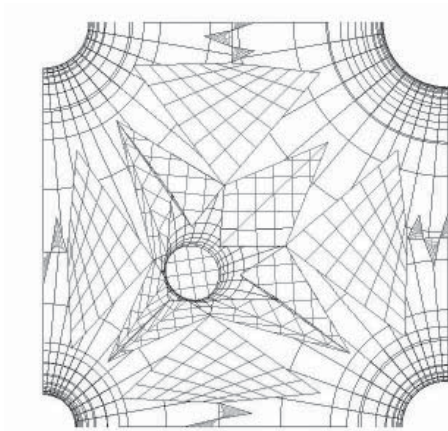


figura 2a



figura 2b

**Exposición del problema geométrico.** [Giralt-Miracle 2002], [Gómez 1996, 1996, 1997, 2008]. Gaudí concibió la nave de la Sagrada Familia como un bosque en el que los pilares, a modo de troncos, arrancando del suelo se ramificaran hacia la bóveda, que debía tener el aspecto de copas de árboles, como se muestra en la figura 1a. Para conseguir este último efecto, concibió la bóveda como un conjunto de hiperboloides de una hoja (que llamaremos principales) entrelazados, recortándose a sí mismos y entre ellos a lo largo de las generatrices rectas y con prolongaciones rematadas por pequeños paraboloides hiperbólicos, imitando las puntas de las hojas (figura 1b). De acuerdo con esta metáfora arbórea, los cuellos o ecuadores de los hiperboloides desempeñan el papel de los claros entre las copas de los árboles, por donde se filtra la luz del día. Como resultado de este esquema, entre las generatrices rectas que recortan dos hiperboloides contiguos, quedan dos espacios o huecos en forma de cuadrilátero alabeado, formado por dos generatrices rectas por cada hiperboloide. En primera instancia, estos espacios se llenan por medio del pedazo de paraboloide hiperbólico que determina el cuadrilátero, como se aprecia en la figura 2a. Si se dejara así, este espacio quedaría ciego. Gaudí va un poco más allá y decide “vaciar” la parte interior de este pedazo por medio de cuatro generatrices interiores, que determinan un subpedazo del mismo paraboloide (figura 2b). Este subpedazo se elimina y en la obertura resultante decide colocar un pequeño lucernario o punto de luz, en este caso artificial. La intención metafórica de Gaudí es que este conjunto de puntos de luz, por la noche, sugiera estrellas cuyo brillo se vislumbra a través de las copas de los árboles. Por lo que se refiere al diseño, la cuestión a dilucidar es qué forma dar a estos lucernarios. Fiel a la lógica de todo el conjunto, Gaudí elige la forma de hiperboloide de una hoja. Cada lucernario se formará según el siguiente plan. Se escoge un hiperboloide de una hoja cuyo cuello (que será la obertura del punto de luz) sea un círculo o, en su defecto, una elipse de medidas decididas a priori y cuyo centro esté más o menos centrado un poco por encima de los cuatro vértices del subpedazo que se ha vaciado. Asimismo, se deberá decidir la orientación espacial de este cuello, que no debe alejarse demasiado de la horizontal. Además, el hiperboloide-lucernario debe pasar por los cuatro vértices mencionados. Una vez determinado el hiperboloide, se trazan las ocho generatrices que provienen de los puntos de paso (dos por cada punto) y se recorta según ellas, quedando una forma parecida a una estrella de cuatro puntas. Finalmente, los espacios entre las generatrices de recorte y las aristas del subpedazo se cierran mediante triángulos. En la figura 3 se aprecia con detalle uno de estos lucernarios terminado y otros dos con una vista más de conjunto, en relación con sus hiperboloides principales. También se pueden descubrir en las imágenes de la figura 1.

El aspecto de estos lucernarios ha inducido a los arquitectos responsables de la obra a llamarlos coloquialmente “barcos”. Lo cierto es que tienen un lejano parecido a un barco... de papel, como se verá en la figura 7.

El concepto del diseño de estos lucernarios (es decir, barcos) es bastante sencillo de entender, pero el problema geométrico, nada trivial, que se plantea y al cual dedicamos este escrito es, para cada subpedazo concreto, cómo determinar exactamente un hiperboloide que pase por los cuatro vértices, con un cuello dado y en una posición “razonable”. Si bien en la nave (figura 1a), gracias a la repetición de las crujía, sólo hay que resolver tres tipos distintos de barcos (dotados además de simetría), al llegar a otras zonas, como el encuentro entre el crucero y el ábside,

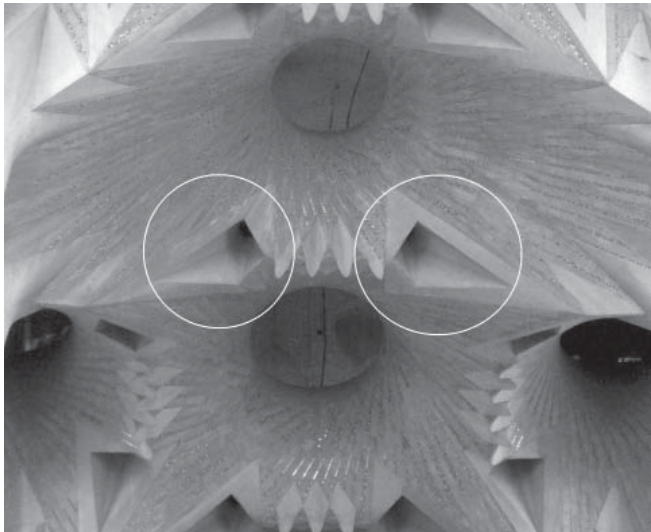


figura 3



figura 4

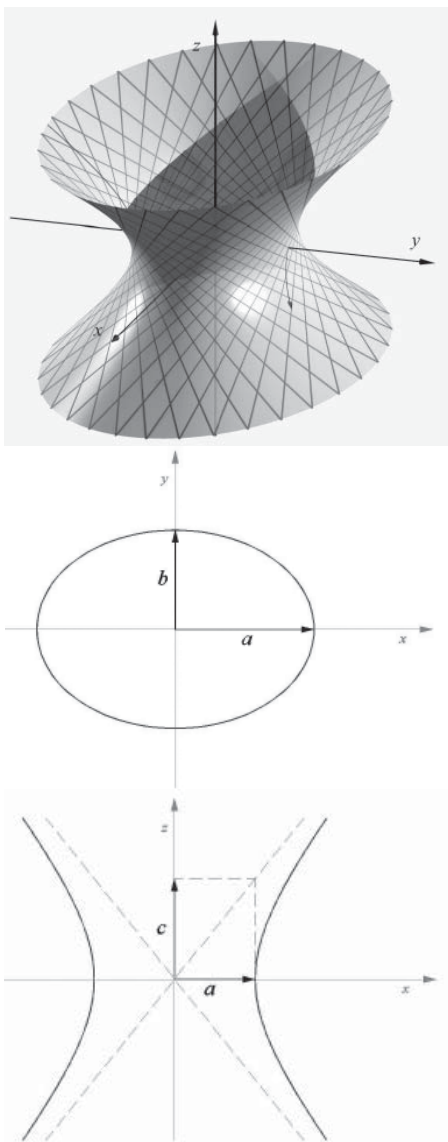


figura 5

la “colisión” entre tramas produce una explosión de cuadriláteros muy irregulares, todos ellos de diferente forma y tamaño, como se aprecia en el esquema de la figura 4. Disponer de un procedimiento eficaz para resolver cada caso se convierte en una necesidad acuciante.

**Traducción a un problema matemático.** Cada barco quedará determinado cuando se concrete el hiperboloide que lo encarna y su posición en el espacio. Para abordar esto, debemos saber qué incógnitas hemos de resolver y qué restricciones se deben cumplir. Del diseño de los hiperboloides principales, los que dejan pasar la luz del día, en un sistema de coordenadas determinado, se obtienen las coordenadas de los cuatro vértices de cada pedazo de paraboloides hiperbólico,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ . Trazando generatrices rectas interiores a un quinto de cada arista desde el borde, se obtienen los cuatro vértices  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_7$  y  $P_8$  del subpedazo, el que debe suprimirse y substituirse por el barco. Ver figura 2b. Sean  $(x_i, y_i, z_i)$  las coordenadas del punto  $P_i$ . Obligar a que el barco pase por estos cuatro puntos dará lugar a cuatro ecuaciones. Respecto a las incógnitas, veamos cuántas y cuáles son.

En un sistema de coordenadas asociado a un hiperboloide de una hoja, éste verifica una ecuación cuadrática (la ecuación cartesiana canónica) del tipo  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

[Alsina 1987], donde a y b son los semiejes de la elipse del cuello y c, que podemos llamar semieje imaginario, en combinación con a y b, determina la excentricidad de las hipérbolas generatrices. Si  $a = b$ , la elipse deviene circunferencia y el hiperboloide es de revolución. En la figura 5 se muestra un hiperboloide, en el que se pueden apreciar las generatrices rectas, junto a una elipse, como corresponde al cuello del hiperboloide (sección por el plano X-Y) y una hipérbola que corresponde a la sección de un hiperboloide por el plano X-Z.

Por exigencias de diseño, el valor de a y b se establece a priori (si no se obtienen soluciones aceptables, se pueden modificar, pero siempre antes de reemprender los cálculos), por tanto, de momento tenemos una única incógnita, el valor de c. Esta ecuación se puede escribir en forma vectorial. En efecto, si

$$P = (x, y, z) \quad Y \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}$$

(Q se denomina matriz de la parte cuadrática), entonces la ecuación canónica queda en la forma  $P^T \circ Q \circ P - 1 = 0$ . Como la única variable en Q es c, denotaremos esta matriz como  $Q(c)$ . Otro elemento geométrico a determinar es la posición del centro del hiperboloide  $C = (x_C, y_C, z_C)$  del que surgen tres incógnitas, una por cada coordenada. Además, debe determinarse la orientación del eje del hiperboloide. Esto conlleva dos incógnitas más. Se puede fijar mediante dos giros, pero en el caso presente es preferible otro procedimiento para determinarlo. En algunos casos, como en el de los barcos que se sitúan alrededor del ábside, conviene que el eje se oriente hacia un punto del piso de la nave (por ejemplo, el centro del crucero). Así que, para determinar el eje del hiperboloide, como su centro siempre estará a considerable altura, se puede definir un punto del piso, sea  $B = (x_B, y_B, z_B)$  y obligar a que el eje del hiperboloide venga dado por el vector  $\vec{w}_3 = C - B$ . El punto B añade dos nuevas incógnitas,  $x_B$  y  $y_B$ , porque  $z_B$  es la altura del piso respecto al sistema de coordenadas con el que se esté trabajando y es un dato conocido. Finalmente, si  $a \neq b$ , falta decidir un giro de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje. De modo que, en el caso elíptico, tenemos 4 ecuaciones y 7 incógnitas mientras que en el circular son 4 y 6 respectivamente. Por supuesto no son ecuaciones lineales; veamos con un poco más de detalle este sistema.

A partir de  $\vec{w}_3$  se trata de construir un sistema ortonormal que será el sistema en el cual el hiperboloide verificará su ecuación cartesiana canónica. Se construye según el siguiente algoritmo: El tercer vector será el  $\vec{w}_3$  normalizado:  $\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$ . Sean, por definición,  $(x_{v_3}, y_{v_3}, z_{v_3})$  sus coordenadas. Si  $\vec{v}_3 = (0, 0, \pm 1)$ , entonces  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ; en otro caso,  $\vec{v}_1 = (y_{v_3}, -x_{v_3}, 0) := (x_{v_1}, y_{v_1}, z_{v_1})$ .

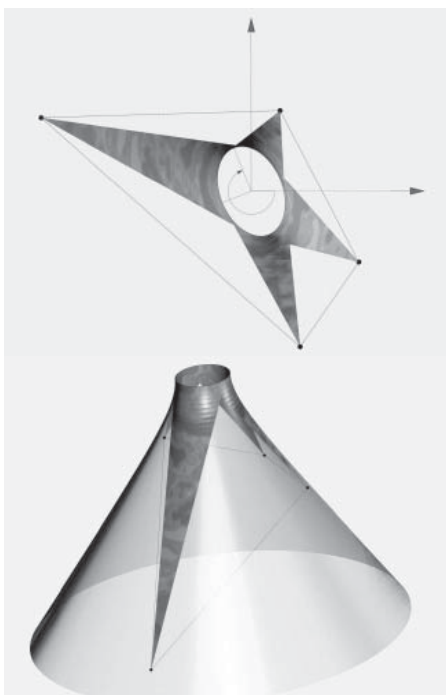
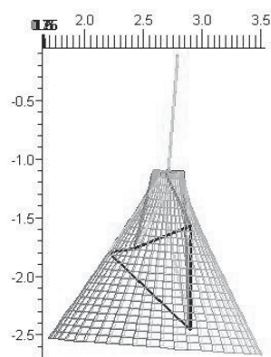
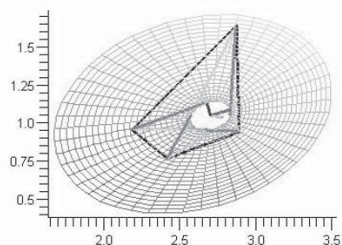
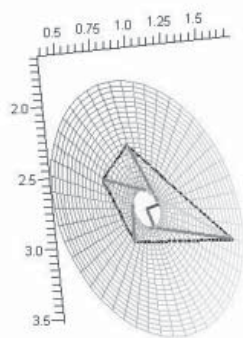
En cualquier caso,  $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1 := (x_{v_2}, y_{v_2}, z_{v_2})$ .

Por tanto, la matriz de cambio de base, que depende de las coordenadas de B y C, es

$$M(C, B) = \begin{pmatrix} x_{v_1} & x_{v_2} & x_{v_3} \\ y_{v_1} & y_{v_2} & y_{v_3} \\ z_{v_1} & z_{v_2} & z_{v_3} \end{pmatrix}$$

Para formular las ecuaciones, en lugar de “mover” el hiperboloide “moveremos” los puntos. Si un punto  $P = (x, y, z)$  del espacio pertenece al hiperboloide, después de cambiar sus coordenadas a las del sistema propio del hiperboloide, ha de cumplir





su ecuación canónica. Para ello, dado P, hay que restarle las coordenadas del centro del hiperboloide, cambiar después al sistema  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  y finalmente aplicarle un giro de ángulo  $-\alpha$  alrededor del eje  $\vec{v}_3$ . Un giro de este tipo, de ángulo  $\mathcal{G}$  cualquiera,

$$\text{tiene por matriz } G_z(\mathcal{G}) = \begin{pmatrix} \cos(\mathcal{G}) & -\sin(\mathcal{G}) & 0 \\ \sin(\mathcal{G}) & \cos(\mathcal{G}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con todo esto, dado un punto P, si definimos la función vectorial

$$F_P(x_C, y_C, z_C, x_B, y_B, \alpha, c) := (P - C)^T \circ (M(C, B))^T \circ (G_z(-\alpha))^T \circ Q(c) \circ G_z(-\alpha) \circ M(C, B) \circ (P - C) - 1,$$

para que P pertenezca al hiperboloide debe verificar la ecuación vectorial

$$F_P(x_C, y_C, z_C, x_B, y_B, \alpha, c) = 0.$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones que se debe resolver es

$$\begin{cases} F_{P_1}(x_C, y_C, z_C, x_B, y_B, \alpha, c) = 0 \\ F_{P_2}(x_C, y_C, z_C, x_B, y_B, \alpha, c) = 0 \\ F_{P_3}(x_C, y_C, z_C, x_B, y_B, \alpha, c) = 0 \\ F_{P_4}(x_C, y_C, z_C, x_B, y_B, \alpha, c) = 0 \end{cases}$$

Se trata, como se ha comentado, de un sistema, con más incógnitas que ecuaciones, que es, por tanto, indeterminado. Aunque no sea lineal, lo esperable es que tenga infinitas soluciones, pero muchas de ellas serán insatisfactorias. Hay una serie de restricciones difusas. Por ejemplo, el centro C no puede quedar muy por encima de los cuatro puntos de paso, pero ha de quedar por encima de todos ellos; las generatrices rectas que salgan de los cuatro puntos, que servirán para recortar el barco, deben cortarse con sus vecinas por debajo del cuello; el punto B no puede ser tal que el eje del barco quede demasiado inclinado, etc. Es decir, tenemos varias restricciones imprecisas que no se pueden traducir a ecuaciones que permitan llegar a un sistema determinado. Esto obliga a una forma de elección de la solución más heurística. Si definimos  $\vec{F} := (F_{P_1}, F_{P_2}, F_{P_3}, F_{P_4})$  (se omite la lista de variables para simplificar la notación), se tiene la aplicación  $\vec{F}: \square^7 \rightarrow \square^4$ , de modo que el sistema se puede escribir como la ecuación  $\vec{F} = 0$ .

En este sentido, de acuerdo con el teorema de la función implícita, en condiciones bastante frecuentes [Apostol 82] relacionadas con determinantes que involucran derivadas parciales, este sistema, en el entorno de un punto solución, define a cuatro de las incógnitas como función implícita de las otras tres. Si pudiéramos explicitar esta función implícita, podríamos (probablemente) estudiar el dominio, el recorrido etc. y tendríamos de un mecanismo bastante potente para elegir una solución satisfactoria desde el punto de vista de los requerimientos de diseño. Pero, como se puede intuir por la complejidad de las ecuaciones vectoriales involucradas, esto se antoja materialmente imposible, de modo que debemos resignarnos a un proceso interactivo y heurístico consistente en escoger tres de las variables que sean especialmente sensibles (es decir, cuyo valor no tenga mucho margen de variación) para fijarlas y resolver el nuevo sistema, ahora con tantas ecuaciones como incógnitas. Por supuesto, el método de resolución deberá ser numérico. Si no hay solución o la que se obtiene no es satisfactoria (apreciación que se guía simplemente por la adecuación al diseño pretendido) hay que variar levemente el valor de alguna de las tres variables y volver a probar y así sucesivamente. La falta de explicitación de la función implícita, nos condena a seguir este proceso un poco a ciegas: algunas veces, una pequeña variación en el valor de una variable produce un cambio enorme en el resultado; otras, simplemente deja de haber solución. No hace falta decir que se han intentado otras estrategias. Se puede, por ejemplo, formular el hiperboloide de manera que se garantice a priori el paso por los cuatro puntos, pero entonces la relación entre las nuevas variable de entrada y las medidas y posición del cuello resultante son todavía más remotas. En definitiva, no se ahorra en dificultad de cálculo ni se gana en automatismo. Sin embargo, también hay que remarcar que este planteamiento es más eficaz que el proceso de tanteo o rastreo de valores de las siete variables a la vez, similar a una bisección multidimensional, que se usó al principio.

**Algoritmo práctico.** Este modelo teórico debe convertirse en un algoritmo programado en algún entorno de suficiente potencia. Se ha escogido la aplicación Maple®. En primer lugar, se ajustan parámetros y se define toda una serie de funciones de entorno que serán necesarias posteriormente.

A continuación se introducen los datos específicos del barco a resolver, provenientes del subpedazo donde se ubicará, y se dibuja el cuadrilátero alabeado correspondiente, para tener una noción previa de su forma.

En este punto, se definen las variables del problema. En primer lugar se "limpian" de cualquier valor numérico, lo cual es útil si durante el proceso interactivo es preciso intercambiar los papeles de las variables que se fijan a un valor y las que quedan como incógnitas.

figura 6



figura d



figura e

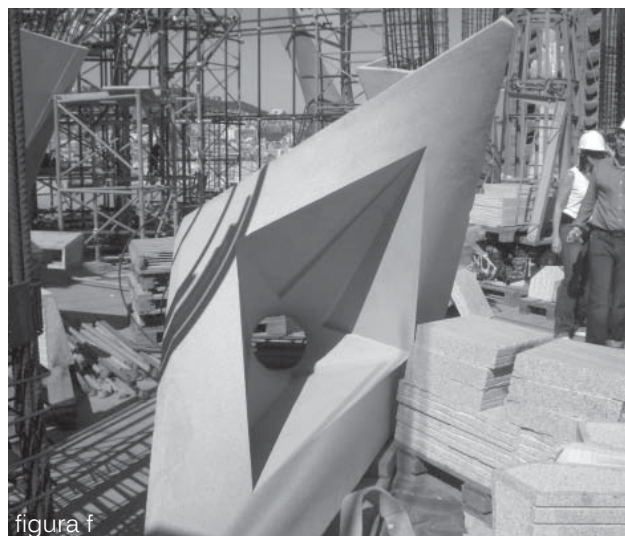


figura f

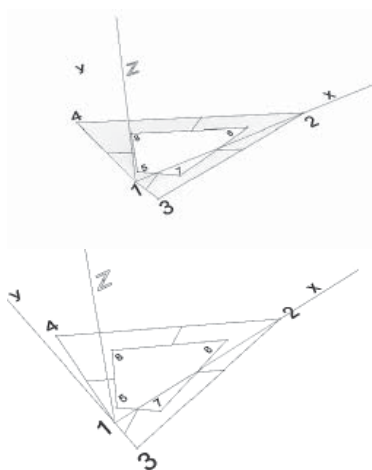


figura a

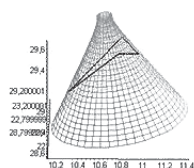
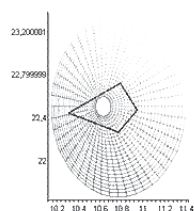


figura b

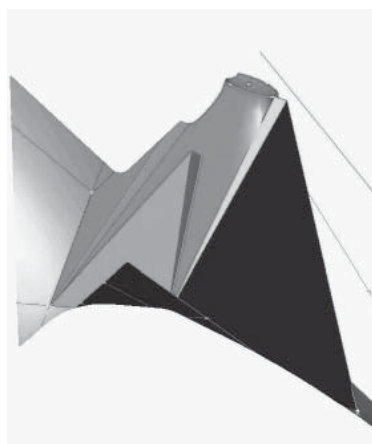


figura c

Una vez hecho esto, se asignan los primeros valores iniciales a las variables que van a ser incógnitas. Como el método de resolución del sistema usará la función `fsolve` de Maple, que a su vez se basa en el método de Newton en varias variables [Morris 1983], los valores iniciales son primeras aproximaciones de los valores solución, a partir de los cuales el método empieza a iterar.

En el siguiente bloque vuelven a aparecer todas las variables, pero ahora, además de  $a$  y  $b$ , las tres (dos en el caso circular, porque entonces la tercera es  $\alpha = 0$ ) que actuarán como variables de la función implícita reciben un valor concreto.

A continuación se definen todas las variables de cálculo, obtenidas a partir de las siete anteriores: centro del hiperboloide, base ortonormal ligada a él, los cuatro puntos de paso "movidos" como se ha comentado antes, etc.

Finalmente llega el núcleo del algoritmo, la aplicación de la función `fsolve` para resolver el sistema planteado. La solución se guarda en una variable llamada `s1`.

Una vez obtenida una solución, se procede a mostrarla gráficamente; para ello se elabora una configuración gráfica conteniendo una porción del hiperboloide desde el cuello hasta abarcar todo el subpedazo (que también se muestra), los tres ejes principales del hiperboloide y las ocho generatrices que salen de los cuatro puntos. Esta configuración se muestra en tres vistas, una planta, un alzado y, especialmente, una vista, la primera, en la que el cuello del hiperboloide se ve frontal. Una condición necesaria y suficiente para que las ocho generatrices se intersequen con sus vecinas por debajo del cuello es que, en esta vista, el cuello aparezca completamente interior al cuadrilátero.

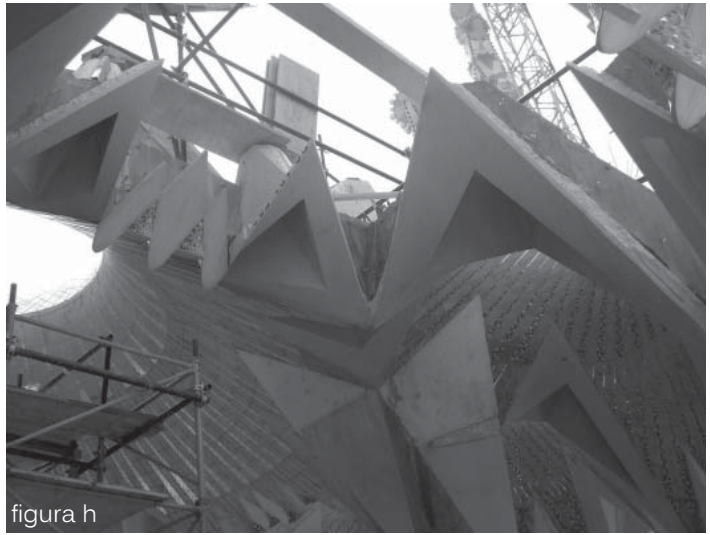
Si los valores numéricos del resultado y la apreciación de las imágenes ofrecen una solución satisfactoria desde el punto de vista del diseño, el proceso termina. La información de salida que se proporciona consiste en las coordenadas, en el sistema inicial, del centro del hiperboloide así como de los extremos de los dos semiejes principales y el valor del semieje imaginario  $c$ , junto con los ya conocidos  $a$  y  $b$  a modo de confirmación. Son, respectivamente, las variables `ece`, `exex` y `exey` y `aa`, `bb` y `cc` del algoritmo. Estos datos son suficientes para generar el hiperboloide y situarlo correctamente en el espacio. Si la solución no es satisfactoria o simplemente no se obtiene ninguna, se debe modificar ligeramente algún valor de las variables fijadas y volver a resolver el nuevo sistema. En este punto, se aprovecha la solución obtenida para actualizar los valores iniciales de las incógnitas. Como las ecuaciones no son lineales, puede haber más de una solución; por ello, también se ofrece la opción de buscar una segunda solución descartando la primera (variable `s2`). En algunas ocasiones, convendrá intercambiar los papeles de variable fija y de incógnita entre las siete variables originales; en otras, será necesario variar las medidas asignadas a la elipse del cuello. De hecho, la primera intención es que sean hiperboloides de revolución; la opción elíptica se adopta cuando, por la forma demasiado irregular del cuadrilátero, la solución circular no es posible. Este proceso interactivo sigue hasta encontrar una solución satisfactoria.

En la figura 6 se puede ver el hiperboloide resultante, ya recortado según las generatrices. Sólo faltan los triángulos entre las generatrices. En la primera imagen se muestran los ejes locales, con el giro  $\alpha$  aplicado al eje del hiperboloide.

**Breve descripción del proceso real de diseño de cada "barco".** Para terminar esta exposición, se describe brevemente el proceso de diseño completo de un barco. Las ilustraciones se agrupan secuencialmente en la figura 7.

Todo empieza en el programa de CAAD que se utiliza para diseñar las bóvedas del





templo. Como se ha comentado, a partir de cada par de hiperboloides principales, se obtienen los cuatro vértices  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  del pedazo de paraboloide hiperbólico por intersección de un par de generatrices rectas de cada hiperboloide. Estos vértices vienen dados por sus coordenadas en el sistema que esté utilizando el programa de CAAD en esa parte del proyecto. De este pedazo se obtiene el subpedazo que se substituirá por el barco. Los datos determinantes son los cuatro vértices  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_7$  y  $P_8$ . Estos datos, junto con los valores que deben tener los semiejes  $a$  y  $b$  y, si es el caso, otros como punto del piso a donde debe apuntar el eje, etc. los proporciona el arquitecto que está elaborando esta parte del proyecto (imagen a). Con ellos, se ejecuta el algoritmo Maple que se ha descrito. El resultado de éste se compone de: coordenadas del centro y de los extremos de los dos semiejes del cuello más el valor numérico de los tres semiejes (b). Con ellos, de vuelta al programa de CAAD, se genera el hiperboloide que pasa por los cuatro puntos, se trazan las generatrices y se recorta el barco tal como se ha descrito anteriormente (c), llenando la parte recortada con cuatro triángulos. Este modelo informático, vía CAD-CAE se convierte en un modelo de poliestireno expandido (d) del cual se extrae un molde de yeso (e) (obsérvese en éste el relativo parecido con un barco de papel). A partir de este último se fabrica, en hormigón armado, el barco definitivo (f). Sólo resta montarlo en su lugar en la bóveda, con la orientación precisa (g), y ensamblarlo con el resto de elementos que lo rodean (h).

Resumen. En este trabajo se ha descrito, con cierto nivel de minuciosidad, el problema de concretar el diseño preciso de los lucernarios nocturnos de la bóveda de la Sagrada Familia que van encajados entre los hiperboloides principales o lucernarios diurnos. El problema, nacido en el ámbito de la arquitectura y aparentemente rutinario según una aproximación superficial, revela, al abordarlo con pretensión ejecutiva, dificultades geométricas inesperadas que requieren del concurso coordinado del cálculo matemático, la informática y la arquitectura para resolverlas. Esta coordinación entre disciplinas distintas conlleva, por supuesto, una (humanamente) más interesante coordinación entre especialistas de diferentes sensibilidades. Todo ello permite ilustrar un nuevo caso de colaboración fecunda entre dos (de hecho tres) disciplinas, la arquitectura por un lado y las matemáticas apoyadas en la informática por el otro, que no siempre sintonizan todo lo bien que potencialmente podrían hacerlo. Con frecuencia, los matemáticos viven de espaldas al mundo del diseño y los arquitectos no acuden a ellas porque simplemente no han adquirido el automatismo mental de relacionar las matemáticas con sus problemas cotidianos de diseño. Desearíamos que este ejemplo sirviera de estímulo para potenciar una actitud multidisciplinar, sin recelos, que sólo puede reportar beneficios para todos ■

El presente artículo es parte de la conferencia dictada por Amadeo Monreal Pujadas y Jordi Coll i Grifoll en la FAU.

Bibliografía. Alsina, C., Trillas, E. Lecciones de Álgebra y Geometría. Barcelona, Ed. Gustavo Gili, 1987. / Apostol, T.M. Análisis Matemático. Barcelona, Ed. Reverté, 1982. / Giral-Miracle D. Gaudí. La búsqueda de la forma. Barcelona, Lunwerg Ed., 2002. / Gómez, J. L'Obrador de Gaudí. Barcelona, Ed. UPC, 1996. / Gómez, J., Coll, J., Burry, M., Melero, J.C. La Sagrada Familia. De Gaudí al CAD. Barcelona, Ed. UPC, 1996. / Gómez, J., Coll, J., Burry, M. Sagrada Familia s. XXI, Gaudí ahora. Barcelona, Ed. UPC, 2008. / Morris, J.L. Computational Methods in Elementary Numerical Analysis. Toronto, Ed. John Wiley & Sons, 1983. / Enrich, R., Carnicero, A., Fornari, G., Monreal, A. (2007) Geometría de la Complejidad. Experimentación formal y espacial: Procesos generativos de objetos a partir de curvas. Actas Vª. Conferencia Mathematics & Design. Univ. Regional de Blumenau, Brasil. Gómez, J., Coll, J., Burry, M., Monreal, A. (1997) A Mathematical framework to Gaudí's use of Geometry. J. Int. Ass. Shell and Spatial Structures. vol. 38-1, pp. 35-51. / Jacas, J., Monreal A. (2002) De la Geometría de Gaudí al CAAD: la búsqueda de un lenguaje. Actas ESTYL 2002. Univ. León, España. pp 1-15. / Jacas, J., Monreal A. (2007) Gaudí en el siglo XXI. Actas Vª. Conferencia Mathematics & Design. Univ. Regional de Blumenau, Brasil. / Agradecimientos. Los autores agradecen a la Junta Constructora del Templo Expiatorio de la Sagrada Familia la autorización del uso de las imágenes del mismo incluidas en este trabajo.